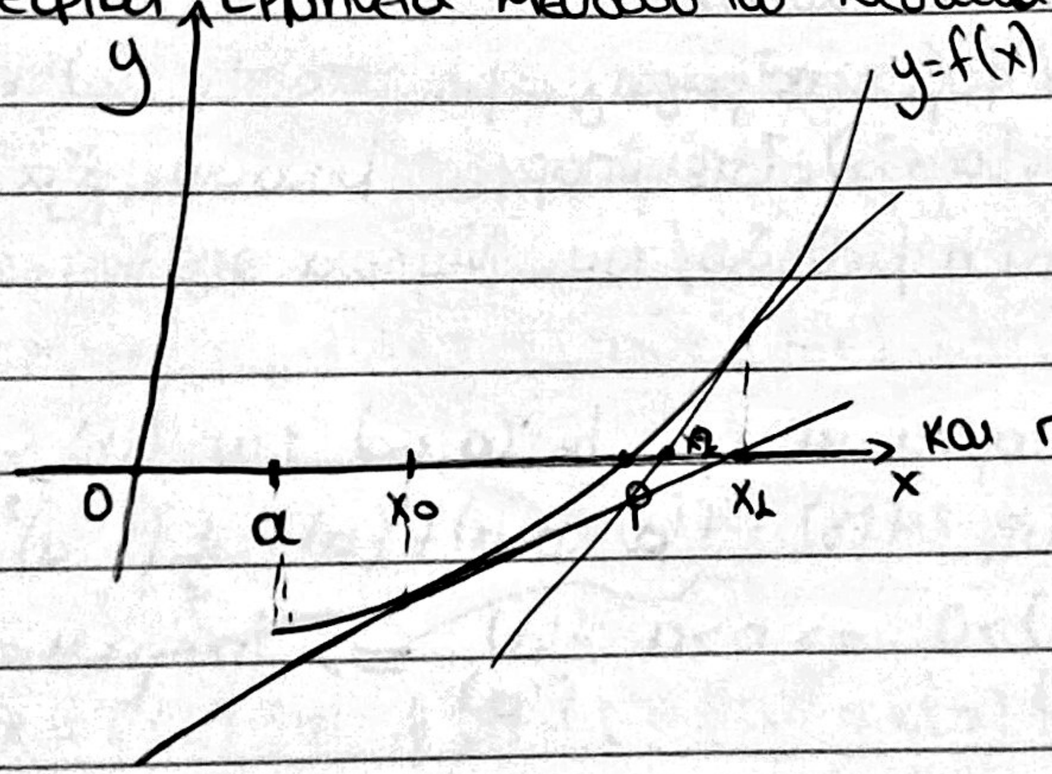
04/11/2025

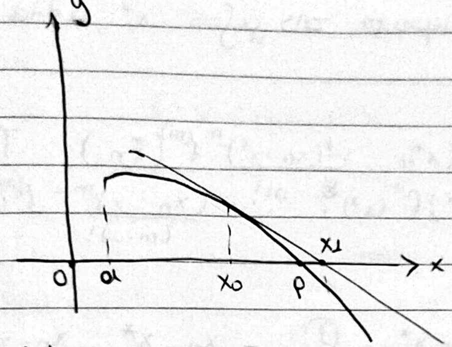
• $f \in C^2[a,\infty)$ $f(a)<0$ $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ $\forall x \in [a,+\infty)$
Τότε υπάρχει μοναδική απλή ρίζα στο $[a,+\infty)$ κ' η μέθοδος Νεύτωνα συγκλίνει στη ρ για κάθε $x_0 \in [a,+\infty)$

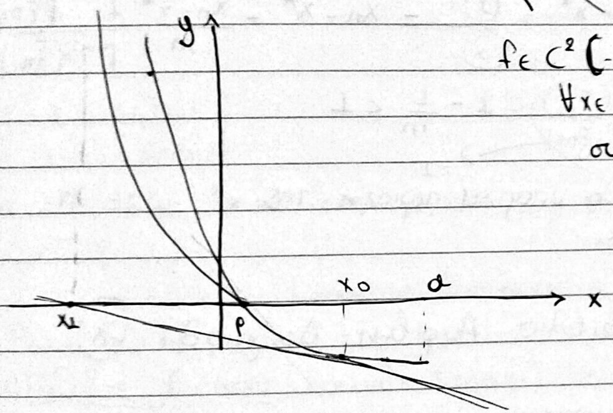
Γεωμετρική Ερμηνεία Μεθόδου του Νεύτωνα.



και πραγματικά συγκλίνει.

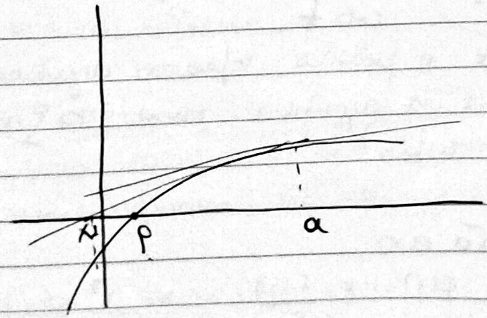
• $f(\alpha)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)<0$ $\forall x\in[\alpha,+\infty)$ τότε $\exists$ απλή ρίζα στο $\rho\in[\alpha,+\infty)$ και η μέθοδος Νεύτωνα συγκλίνει για κάθε $x_0\in[\alpha,+\infty)$





• $f\in C^2(-\infty,\alpha]$ με $f(\alpha)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ $\forall x\in(-\infty,\alpha]$ τότε $\exists!$ απλή ρίζα στο $(-\infty,\alpha)$ κ' η Μέθοδος Νεύτωνα συγκλίνει $\forall x_0\in(-\infty,\alpha]$

• $f(\alpha)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$, $\forall x\in(-\infty,\alpha]$ τότε $\exists!$ $\rho\in(-\infty,\alpha)$ κ' η Μέθοδος Νεύτωνα συγκλίνει $\forall x_0\in(-\infty,\alpha]$



ΘΕΩΡΗΜΑ (Ειδική περίπτωση του θεωρήματος τοπικής σύγκλισης)

Έστω $f \in C^m(I)$ όπου $x^* \in I$ ρίζα της $f(x)=0$ πολ/τητας m. Τότε η Μέθοδος Νεύτωνα συγκλίνει σε μια περιοχή της ρίζας x^*, αλλά η σύγκλιση είναι γραμμική

Απόδειξη $f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \dots + \frac{1}{m!}(x_n - x^*)^m f^{(m)}(\xi_{n1})$ Taylor ①

$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$ Taylor ②

(Τα $\xi_{n1}, \xi_{n2} \in (x_n, x^*)$)

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - \frac{①}{②} = x_n - x^* - \frac{x_n - x^*}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 - \frac{1}{m} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(m)}(\xi_{n1})}{f^{(m)}(\xi_{n2})}}_{=1} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

Επομένως, λόγω συνέχειας της f θα υπάρχει περιοχή της x^* ώστε η μέθοδος του Νεύτωνα και συγκλίνει

Για λύσιμο η άσκηση 2.25 βιβλίο Ακρίβη - Δουγαλή (*)

"ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ"

Τύπος $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$ $x_0, x_1 \in [a, b]$ όπου $x^* \in [a, b]$

$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ → αριθμητική προσέγγιση της παραγώγου της f.

Αν $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) \neq 0$, τότε η μέθοδος τέμνουσας συγκλίνει $\forall\, x_0, x_n$ στην περιοχή του x^* κ' η σύγκλιση είναι τάξης

$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.62$ (χρυσή τομή)

Η μέθοδος Νεύτωνα για την $\sqrt{a}$, $a > 0$

$$f(x) = x^2 - a = 0 \qquad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ τετραγωνικής σύγκλισης

$n = 0, 1, \dots$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.4166667$

$x_3 = 1.4142157$

$x_4 = 1.414\overset{1}{2}356$ $\sqrt{2} \simeq 1.4442356$